Soluzione Progetto 2 ASD a.a. 2018/2019

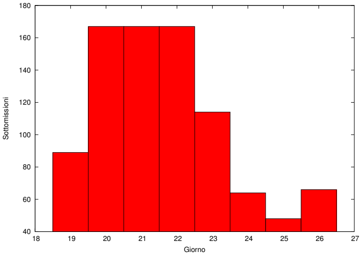
Assedio a Nassau

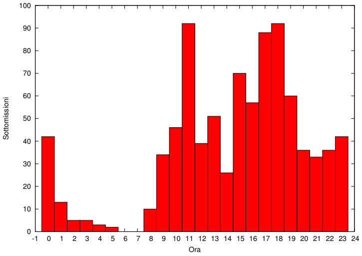
Alessio Guerrieri e Lorenzo Ghiro

21 marzo 2018

Statistiche

Numero sottoposizioni: 882





- 82 gruppi iscritti;
- 187 studenti;
- $\sim$ 7 ore di ricevimento (compresi i laboratori);
- 24 mail ricevute;

Valutazione e punteggi

- I punti ottenuti con questo progetto saranno sommati a quelli del prossimo;
- La classifica del **progetto 2** è disponibile sul sito delle slides: `classifica_prog2.pdf`;
- La classifica finale con i punti bonus sarà quindi ufficializzata solo al termine del **progetto 3**;
- È necessario partecipare ad almeno un progetto per entrare in classifica;
  - ovviamente partecipare ad entrambi conviene per aumentare il proprio punteggio!

Promemoria

Descrizione del problema

I pirati sono sotto assedio nella roccaforte a difesa di Nassau, gli inglesi attaccano dal mare con vascelli e fregate. Per affondare un vascello servono due colpi di cannone, ne basta uno per affondare una fregata. La potenza della flotta nemica è definita come prodotto fra il numero di vascelli e fregate.
I pirati bombardano a caso la flotta nemica ma colpiscono sempre un'imbarcazione. Nella roccaforte il numero di munizioni (palle di cannone) è limitato.
Problema: Dato il numero di vascelli, fregate e munizioni, calcolare il valore atteso della potenza della flotta rimasta una volta esaurite le munizioni.

Sketch della soluzione più intuitiva

- Ci domandiamo cosa succede alla flotta cannonata dopo cannonata;
- Teniamo traccia del numero di vascelli e fregate rimasti dopo ogni colpo;
  - Non basta, teniamo traccia anche dei vascelli danneggiati, ma non affondati;
- Di volta in volta, calcoliamo le probabilità di colpire un vascello, una fregata, o un vascello già danneggiato;
- Procedendo ricorsivamente, arriveremo a dei casi in cui non abbiamo più munizioni; restituiamo allora la potenza della flotta rimasta;
- "Chiudendo la ricorsione", ci ricordiamo con quale probabilità si raggiunge questo esito;

Così facendo calcoliamo, con una media ponderata, il valore atteso della potenza residua della flotta.

Formalizzazione

Definizioni

Siano:

- $V = \#$ vascelli $(2HP)$;
- $F = \#$ fregate $(1HP)$;
- $M = \#$ munizioni;
- $D = \#$ vascelli danneggiati;

Allora:

POTENZA FLOTTA: $(V + D) \times F$;

INPUT: $[V, F, M]$;

OUTPUT: valore atteso potenza della flotta alla fine della guerra

Spazio degli stati

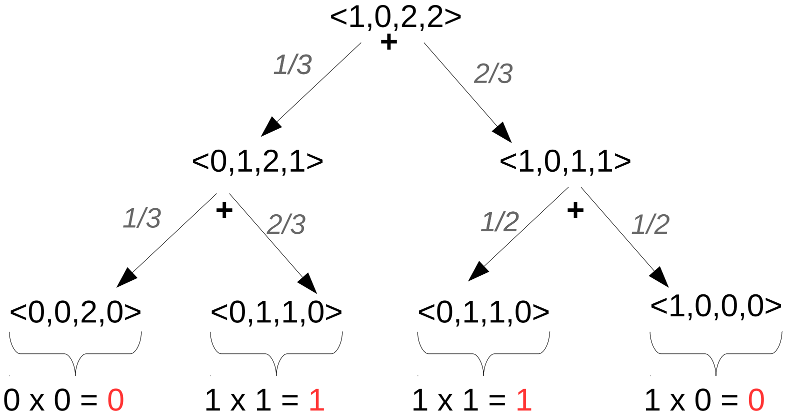
- Per descrivere uno stato usiamo una quadrupla del tipo

$$\langle V, D, F, M \rangle$$

dove V, D, F, M indicano, rispettivamente, il numero di vascelli, di vascelli danneggiati, di fregate e di munizioni nello stato corrente.

Considerando di partire con 1 Vascello, 2 fregate e 2 palle di cannone, una visualizzazione del calcolo da eseguire è la seguente

Visualizzazione ricorsiva



Equazione di ricorrenza

Dal diagramma precedente ricaviamo la seguente equazione di ricorrenza

$$EP(V,D,F,M) = \begin{cases} (V+D)\times F, & \text{if } M = 0 \\ \frac{1}{V+D+F} \times (& \\ \quad V \times EP(V-1, D+1, F, M-1) + & \\ \quad D \times EP(V, D-1, F, M-1) + & \\ \quad F \times EP(V, D, F-1, M-1)\ ) & \text{if } M > 0 \end{cases}$$

EP sta per *Expected Power*

Commento

Se ho finito le munizioni restituisco il valore della flotta. Altrimenti posso colpire o un vascello, o un vascello danneggiato o una fregata rispettivamente con probabilità $V/(V+D+F)$, $D/(V+D+F)$ e $F/(V+D+F)$ per poi proseguire il calcolo combinando la probabilità dei successivi eventi. Si noti quindi che $1/(V+D+M)$ è stato raccolto, mentre la restante ricorsione viene così gestita:

- se colpisco un vascello scalo V e incremento D;
- se colpisco un vascello danneggiato scalo D;
- se colpisco una fregata scalo F;
- scalo sempre il numero di munizioni M (ad ogni turno sparo un colpo).

Implementazione dinamica con memoization

La matrice di memoization deve registrare i valori che può assumere la funzione $EP()$ potenzialmente per tutte le quadruple $\langle V, D, F, M \rangle$. Chiamiamo *memo* tale matrice 4-dimensionale in cui l'elemento $memo[v][d][f][m]$ registra il valore assunto da $EP(v, d, f, m)$ nel caso in cui esso sia già stato calcolato, $\perp$ inizialmente.

Inizializzazione matrice memoization

- I valori di memo in cui $(v + d) == 0 \vee f == 0$ sono inizializzati a 0;
- infatti in tali casi la potenza attesa della flotta non può essere che 0 per la proprietà di annullamento del prodotto.

Pseudocodice Prima Soluzione con Memoization

```
init(memo)
procedure EP(v, d, f, m)
    if m == 0 then
        return (v + d) × f
    end if
    if memo[v][d][f][m] == ⊥ then
        memo[v][d][f][m] ← ∗
*recursive as before, just with memoization caching...
    end if
    return memo[v][d][f][m]
end procedure
```

Note sulla complessità

Le possibili implementazioni di questa prima soluzione hanno questa complessità

- Puramente ricorsiva $\Rightarrow$ esponenziale;
- Dinamica con memoization $\Rightarrow O(V \times V \times F \times M)$ sia in termini di tempo che di memoria.

Verso una soluzione avanzata

Trucchetto1: “Trucco degli spari”

Si può evitare di mantenere m tra i parametri dell’equazione di ricorrenza, riducendo così lo spazio degli stati. Basta calcolare localmente, ad ogni passo della funzione ricorsiva, la differenza tra munizioni iniziali e il numero di colpi sparati finora. Il numero di colpi sparati si ricava a sua volta dalla differenza tra *life-points cumulativi* totali della flotta iniziale e *life-points* correnti:

$$\begin{cases} shots = (2V + F) - (2v + f + d) \\ m = M - shots \end{cases}$$

Ma il vero colpo di genio è affrontare il problema cercando di risolvere un problema diverso da quello originale che però, assieme ad una piccola formuletta di calcolo combinatorio, porta ugualmente alla soluzione corretta. Vediamo...

Verso una soluzione avanzata (cont)

Problema alternativo

Calcolare la probabilità che una data coppia, formata da un vascello e una fregata, si salvi.

Sia p la probabilità che calcoliamo. Questa p rappresenta il contributo di una singola coppia (vascello, fregata) alla potenza finale della flotta. Possiamo estendere il risultato a tutte le altre coppie presenti inizialmente, che sono in tutto $V \times F$, e ottenere così il valore atteso della potenza della flotta al termine dello scontro, come era richiesto.
Se dunque è questa l'equazione risolutrice:

$$p \times (V \times F)$$

ci resta da capire come calcolare p.

Verso una soluzione avanzata (cont)

Trucchetto2: “Players’ Lifepoints”

Evitiamo di tenere il conto dei vascelli danneggiati. Basta sapere quante navi da 2 punti vita (HP) e quante da 1HP sono rimaste.

Altri accorgimenti

- La coppia di riferimento va esclusa dalla flotta iniziale (per preservarla dai colpi!);
- Bisogna considerare il caso in cui il vascello della coppia di riferimento viene colpito ma non affondato;
  - Usiamo un flag d: d vale 1 se il vascello viene danneggiato, 0 altrimenti.

Trucchi e accorgimenti della soluzione avanzata sono stati svelati, così come il nuovo problema da porsi. Ora possiamo presentare lo pseudocodice della soluzione avanzata.

Pseudocode Soluzione avanzata

```
procedure PROB(d, hp2, hp1)
    shot = (V * 2 + F) - (hp2 * 2 + hp1 + (2 - d) + 1);
    if shot == M then                                  ▷ Finito le munizioni
        return 1
    else
        score = 0; tot = hp1 + hp2 + 2.0
        if d == 0 then                                 ▷ Colpisco vascello della coppia
            score += PROB(1, hp2, hp1) * 1/tot;
        end if
        if hp2 > 0 then                                ▷ Colpisco un vascello intatto
            score += PROB(d, hp2 - 1, hp1 + 1) * hp2/tot
        end if
        if hp1 > 0 then                                ▷ Colpisco fregata o vascello danneggiato
            score += PROB(d, hp2, hp1 - 1) * hp1/tot;
        end if
        return score;
    end if
end procedure
```

Invocazione ed uscita

```
int main() {
    in >> V >> F >> M;
    ...
    double p = prob(0, V-1, F-1);
    ...
    out << p * (V*F) << endl;
    ...
}
```

Commento

- Si invoca `PROB` sottraendo 1 a V e ad F, ipotizzando di sottrarre una certa coppia alla flotta;
  - Calcoleremo la probabilità di salvarsi di questa coppia;
  - Inizialmente supponiamo che il vascello di questa coppia non sia danneggiato, infatti nell'invocazione $d = 0$;
- Uscendo ci ricordiamo che bisogna moltiplicare il tutto per il numero di possibili coppie: $p \times (V \times F)$.

Ora analizziamo con più calma lo pseudocodice della soluzione avanzata.

Commento Pseudocodice Soluzione Avanzata

- A `linea2` si applica il *trucco degli spari*;
- Esauriti i colpi si termina la ricorsione restituendo 1 (`linee3-4`);
  - Se non ci sono più munizioni e la coppia è ancora salva, allora la sua probabilità di salvarsi è per forza 1 $\Rightarrow$ 100%;
- Nel caso ricorsivo accumuliamo nella variabile *score* la somma delle probabilità dei possibili eventi, che sono:
  - colpire il vascello della nostra coppia di riferimento (`linee7-9`). Si noti come il flag *d* venga impostato a 1;
  - colpire una nave da 2HP (`linee10-12`) o da 1HP (`linee 13-15`);
- le sottochiamate ricorsive sono gestite intuitivamente decrementando i parametri attuali corrispondenti al tipo di nave colpita.

Commento Pseudocodice Soluzione Avanzata (cont)

- Ognuno dei casi è pesato per il valore di probabilità che ha di verificarsi, in generale pari a $\#Navi/tot$;
  - tot è il numero totale di navi (definito a `linea6`). Un $+2$ ci ricorda che al momento di invocare la funzione avevamo sottratto le 2 imbarcazioni che supponiamo di non colpire.
- La funzione restituisce correttamente 0 quando la nostra coppia non ha nessuna speranza di salvarsi. Infatti, disponendo di abbondanti munizioni, la ricorsione raggiungerà necessariamente casi in cui gli `if` alle `linee7;10;13;` saranno tutti falsificati e *score* varrà quindi 0;
- Questo 0 sarà propagato ricorsivamente e, per annullamento del prodotto, annullerà la probabilità di salvarsi della nostra "disgraziata" coppia di navi.

Note sulla complessità

Complessità delle possibili implementazioni della soluzione avanzata

- Con memoization $\Rightarrow O(V \times F)$;
  - Notare la riduzione di complessità grazie all'applicazione dei trucchetti!
- Iterativa con risparmio di memoria $\Rightarrow O(V \times F)$ e $O(F)$ di memoria;
  - Con risparmio di memoria si intende l'uso accorto delle sole e poche righe della tabella di memoization davvero necessarie per completare i calcoli.